

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 При каких значениях параметра a сократима дробь $\frac{x^2 - x - 2}{x - a}$?

Решение.
Разложим квадратный трехчлен на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена.
 $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.
Таким образом, чтобы сократить дробь $\frac{(x - 2)(x + 1)}{x - a}$, параметр $a = 2$ или $a = -1$.

Ответ: $a = 2, a = -1$.
Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ.
1	Ход решения правильный, квадратный трехчлен в числителе разложен, но при этом допущена ошибка в знаке, например, получен $x-1$, ответ дан с учетом этой ошибки. Или: допущена описка на последнем шаге.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ.
1	Ход решения правильный, квадратный трехчлен в числителе разложен, но при этом допущена ошибка в знаке, например, получен $x-1$, ответ дан с учетом этой ошибки. Или: допущена описка на последнем шаге.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

20 Решите уравнение $x^2 + 3\sqrt{x^2} - 10 = 0$.

Решение.
Так как $\sqrt{x^2} = |x|$, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 + 3|x| - 10 = 0$.
Введем новую переменную. Пусть $|x| = a$. Так как $x^2 = |x|^2$, то имеем квадратное уравнение относительно a : $a^2 + 3a - 10 = 0, a = -5$ или $a = 2$.
 $|x| = -5$ или $|x| = 2$.
Первое уравнение корней не имеет.
Второе уравнение имеет два корня: $x = 2, x = -2$.
Ответ: $-2; 2$.

Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении квадратного уравнения допущена вычислительная ошибка или описка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении квадратного уравнения допущена вычислительная ошибка или описка.
1	Модуль раскрыт правильно, но при дальнейшем решении квадратных уравнений не отброшены лишние корни.
0	Другие случаи, не соответствующие другим критериям.

21 Сумма квадратов цифр положительного двузначного числа равна 13. Если из этого числа отнять 9, то получится число, записанное этими же цифрами в обратном порядке. Найдите это число.

Решение.
Задачу решим с помощью уравнения.
Пусть x – первая цифра в числе (т.е. число десятков), y – вторая цифра (т.е. число единиц). Само число записывается $10x + y$; тогда число, записанное в обратном порядке: $10y + x$.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 10x + y - 9 = 10y + x. \end{cases}$
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x - y = 1; \end{cases} \begin{cases} 2y^2 + 2y - 12 = 0, \\ x = 1 + y; \end{cases} \begin{cases} y^2 + y - 6 = 0, \\ x = 1 + y; \end{cases} \begin{cases} y = -3, \\ x = -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 2, \\ x = 3. \end{cases}$

Условию задачи удовлетворяет только пара $x = 3, y = 2$. Тогда двузначное число: 32.
Ответ: 32.

Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и ответ отличается от правильного.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

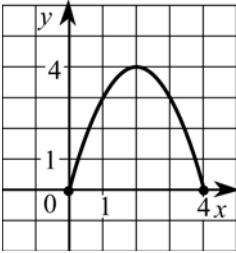
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и ответ отличается от правильного.
1	Верно найдены пары цифр, но не выбрано число удовлетворяющее условию задачи. Или: ход решения верный, но допущены две вычислительные ошибки и описки.
0	Другие случаи, не соответствующие другим критериям.

22

Постройте график функции $y = \left(\sqrt{4x - x^2}\right)^2$.

Решение.
Область определения функции: $4x - x^2 \geq 0, x(4 - x) \geq 0, 0 \leq x \leq 4$.
Так как $\left(\sqrt{4x - x^2}\right)^2 = 4x - x^2$, то надо построить график функции $y = 4x - x^2$ с областью определения $[0; 4]$.
Графиком функции $y = 4x - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, т.к. $a = -1$.
Вершина параболы: $x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2; y_в = 8 - 4 = 4$.
Точки пересечения с осью Ox : $y = 0, 4x - x^2 = 0$, то $x = 0$ и $x = 4$.
Точки пересечения с осью Oy : $x = 0, y = 0$.
Дополнительные точки:

x	1	3
y	3	3



Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
5	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка в координатах точек.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка в координатах точек.
2	Верно найдена область определения, построена парабола, но при построение не учитывалась область определения. Или: ход решения верный, но допущены две вычислительные ошибки или описки.
1	Построена парабола, но не указана область определения.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

23

Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если из этих чисел вычесть соответственно 1, 2, 11, 44, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие арифметическую прогрессию.

Решение.
Пусть члены геометрической прогрессии имеют вид: $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3$, где b_1 – первый член геометрической прогрессии, q – знаменатель.
По условию числа: $b_1 - 1, b_1q - 2, b_1q^2 - 11, b_1q^3 - 44$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Применим свойство арифметической прогрессии, связывающее каждый член прогрессии (кроме первого) с двумя «соседними» членами.

$$b_1q - 2 = \frac{b_1 - 1 + b_1q^2 - 11}{2} \text{ и } b_1q^2 - 11 = \frac{b_1q - 2 + b_1q^3 - 44}{2}$$

Упростим первое выражение:

$$2b_1q - 4 = b_1 - 1 + b_1q^2 - 11, \quad b_1(q^2 - 2q + 1) = 8, \quad b_1(q - 1)^2 = 8.$$

Упростим второе выражение:

$$2b_1q^2 - 22 = b_1q - 2 + b_1q^3 - 44, \quad b_1q(q^2 - 2q + 1) = 24, \quad b_1q(q - 1)^2 = 24.$$

Из первого и второго уравнений следует: $q = 3$. Тогда $b_1 = 2$.

Четыре числа, образующих геометрическую прогрессию: 2; 6; 18; 54.

Четыре числа, образующих арифметическую прогрессию: 1; 4; 7; 10.

Ответ 1; 4; 7; 10.

Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
5	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка – в преобразованиях или в вычислениях, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены правильно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена вычислительная ошибка или описка.
2	Верно найдены q и первый член геометрической прогрессии, но решение не доведено до конца. Или: ход решения верный, но допущены две вычислительные ошибки или описки.
1	Верно найдены q и первый член геометрической прогрессии, но решение не доведено до конца и допущена одна арифметическая ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 При каких значениях параметра a сократима дробь $\frac{x^2 - 7x - 8}{x - a}$?

Решение.
Разложим квадратный трехчлен на множители по формуле:
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена.
 $x^2 - 7x - 8 = (x - 8)(x + 1)$.
Таким образом, чтобы сократить дробь $\frac{(x - 8)(x + 1)}{x - a}$, параметр $a = 8$ или $a = -1$.

Ответ: $a = 8$; $a = -1$.

Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ.
1	Ход решения правильный, квадратный трехчлен в числителе разложен, но при этом допущена ошибка в знаке, например, получен $x-1$, ответ дан с учетом этой ошибки. Или: допущена описка на последнем шаге.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ.
1	Ход решения правильный, квадратный трехчлен в числителе разложен, но при этом допущена ошибка в знаке, например, получен $x-1$, ответ дан с учетом этой ошибки. Или: допущена описка на последнем шаге.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

20 Решите уравнение $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 7 = 0$.

Решение.
Так как $\sqrt{x^2} = |x|$, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 + 6|x| - 7 = 0$.
Введем новую переменную. Пусть $|x| = a$. Так как $x^2 = |x|^2$, то имеем квадратное уравнение относительно a : $a^2 + 6a - 7 = 0$, $a = -7$ или $a = 1$.
 $|x| = -7$ или $|x| = 1$.

Первое уравнение корней не имеет. Второе уравнение имеет два корня: $x = 1$, $x = -1$.

Ответ: -1 ; 1 .

Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении квадратного уравнения допущена вычислительная ошибка или описка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении квадратного уравнения допущена вычислительная ошибка или описка.
1	Модуль раскрыт правильно, но при дальнейшем решении квадратных уравнений не отброшены лишние корни.
0	Другие случаи, не соответствующие другим критериям.

21 Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Решение.
Задачу решим с помощью уравнения.
Пусть x – первая цифра в числе (т.е. число десятков), y – вторая цифра (т.е. число единиц). Само число записывается $10x + y$; тогда число, записанное в обратном порядке: $10y + x$.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} 3xy = 10x + y, \\ 10x + y + 18 = 10y + x. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3xy = 10x + y, \\ x - y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y^2 + 2y - 12 = 0, \\ y = x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0, \\ y = x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4, \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 1\frac{2}{3}, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Получаем число 24.

Ответ: 24.

Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и ответ отличается от правильного.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и ответ отличается от правильного.
1	Верно найдены пары цифр, но не выбрано число удовлетворяющее условию задачи. Или: ход решения верный, но допущены две вычислительные ошибки и описки.
0	Другие случаи, не соответствующие другим критериям.

22

Постройте график функции $y = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^2$.

Решение.

Область определения функции: $x^2 + 2x \geq 0, x(x + 2) \geq 0, x \leq -2$ или $x \geq 0$.

Так как $\left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^2 = x^2 + 2x$, то надо построить график функции $y = x^2 + 2x$ с областью определения $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

Графиком функции $y = x^2 + 2x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, т.к. $a = 1$.

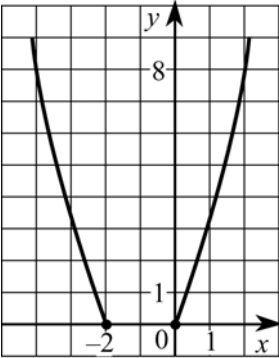
Вершина параболы $x_{\text{в}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1; y_{\text{в}} = 1 - 2 = -1$.

Точки пересечения с осью Ох: $y = 0, x^2 + 2x = 0$, то $x = 0$ и $x = -2$.

Точки пересечения с осью Оу: $x = 0, y = 0$.

Дополнительные точки:

x	1	2	3	-3	-4	-5
y	3	8	15	3	8	15



Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
5	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка в координатах точек.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка в координатах точек.
2	Верно найдена область определения, построена парабола, но при построение не учитывалась область определения. Или: ход решения верный, но допущены две вычислительные ошибки или описки.
1	Построена парабола, но не указанна область определения.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

23

Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить соответственно 2, 5, 7 и 7, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие арифметическую прогрессию.

Решение.

Пусть члены геометрической прогрессии имеют вид $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3$, где b_1 – первый член геометрической прогрессии, q – знаменатель.

По условию задания числа $b_1 + 2, b_1q + 5, b_1q^2 + 7, b_1q^3 + 7$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Применим свойство арифметической прогрессии, связывающее каждый член прогрессии (кроме первого) с двумя «соседними» членами.

$$b_1q + 5 = \frac{b_1 + 2 + b_1q^2 + 7}{2} \text{ и } b_1q^2 + 7 = \frac{b_1q + 5 + b_1q^3 + 7}{2}$$

Упростим первое выражение:

$$2b_1q + 10 = b_1 + 2 + b_1q^2 + 7,$$
$$b_1(q^2 - 2q + 1) = 1, \quad b_1(q - 1)^2 = 1.$$

Упростим второе выражение:

$$2b_1q^2 + 14 = b_1q + 5 + b_1q^3 + 7$$
$$, \quad b_1q(q^2 - 2q + 1) = 2, \quad b_1q(q - 1)^2 = 2.$$

Из первого и второго уравнений следует: $q = 2$. Тогда $b_1 = 1$.

Четыре числа, образующих геометрическую прогрессию: 1; 2; 4; 8.

Четыре числа, образующих арифметическую прогрессию: 3; 7; 11, 15.

Ответ: 3; 7; 11, 15.

Модель 1

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
5	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка – в преобразованиях или в вычислениях, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены правильно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Модель 2

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена вычислительная ошибка или описка.
2	Верно найдены q и первый член геометрической прогрессии, но решение не доведено до конца. Или: ход решения верный, но допущены две вычислительные ошибки или описки.
1	Верно найдены q и первый член геометрической прогрессии, но решение не доведено до конца и допущена одна арифметическая ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.